# A bizonyítás képessége a tudományosság alapja

**jun./sen. Pitlik László, 2013. november – 2014. március**

## Bevezetés

**A TDK-dolgozatok minőségbiztosítása kapcsán (vö. <http://miau.gau.hu/miau2009/index.php3?x=e61>) világosság vált, hogy a TDK-dolgozatok egy része (ill. szinte minden dolgozat egyes részei) oly mértékig leíró jellegűek, önkényes javaslatokat és kijelentéseket tartalmazóak, hogy ezek kapcsán csak célirányos „tudományos ismeretterjesztésről”, ill. szépirodalmi tevékenységről illene beszélni: kutatásról, strukturált gondolkodásról, reprodukálható problémamegoldásról nem feltétlenül. A TDK-Szerzők számára (s mint erre időközben más egyetemeken végzett tanácsadási feladatok kapcsán fény derült, az oktatók/kutatók számára, s az őket mozgató szervezet számára) a bizonyítás fogalma nem tűnik kellően kiérleltnek. Ezért az alábbiakban jelen tanulmány szerzőiként (matematika-kémia szakos tanárjelöltként és minőségbiztosító/tehetséggondozóként) kísérletet teszünk arra, hogy a klasszikus matematikai bizonyításokból elindulva segítséget nyújtsunk a bizonyítások valódi ízének megsejtésére, a bizonyítások logikájának nem matematikai kérdések esetére való adaptálására…**

**Ajánlott irodalomként álljon itt a logika fegyvertárának egyik többszázéves mesterétől, Johannes Duns Scottustól a párizsi előadásokra, avagy a „tudásról és esetlegességekről” szóló műre való utalás:** <http://www.libri.hu/konyv/parizsi-eloadas.html>

## Bizonyítás teljes indukcióval

**Kiindulásként érdemes talán a bizonyítások kapcsán az egyik leginkább klasszikusnak és az érettségi felkészülések révén szinte minden érintett számára közismertnek nevezhető teljes indukció fogalmát nagyító alá venni:**

**Legyen egy feladat az alábbi:**

bizonyítandó minden egész számok esetén.

Szövegesen: egy komplex jelenség esetén (vö. ) bizonyítandó, hogy bármilyen pozitív egész szám (’n’) kapcsán igaz, hogy a komplex jelenség eredménye egy 17-tel osztható szám.

A fenti kifejezésbe a legkisebb létező értékeket behelyettesítve tapasztalati úton adódik, hogy esetén az állítás igaz. Most tegyük fel, hogy -ig minden számra igaz az állítás, azaz ha már tetszőlegesen sok manuális próbát végre is hajthattunk volna; akkor is bizonyítandó, hogy -re is igaz lesz az állítás. Ilyen módon bármely -re bizonyítottá válhat az állítás. Más szavakkal, avagy képletesen (s egyben ez a teljes indukció lényege): ha egy lépcsősor bármely lépcsőfokáról fel tudunk lépni a következőre, akkor tetszőlegesen hosszú lépcsősoron fel kell tudnunk sétálni.

Indukciós feltevés (ahol k szerepel immár az n helyén):
Az állítás -re (értelemszerűen a k helyén szerepel a k+1) :

Vagyis bizonyítandó, hogy a már kipróbált, azaz tapasztalati úton egyedileg „bizonyított” = belátott, megmért számokon túl bármely számra is igaz az állítás/feltételezés – az által, hogy a mindenkori következőre igaz. A kipróbálás, a mérés még nem bizonyítás, csak azt jelzi, hogy ott és akkor úgy tűnik, igaz volt a feltételezés. Ha egy beláthatóan nagy (véges), vagy végtelen méretű lehetőségi térből (vö. kombinatorikai tér) kellően sok elemet választva valamilyen jelenség ezekre igaz, még az sem bizonyítása annak, hogy mindenkor, azaz minden elemre, vagyis a végtelenben is igaz kell, hogy legyen, de a valószínűsége a kipróbálások számával arányosan egyre nő az igazságtartalomnak. Véges esetszám kapcsán előbb-utóbb minden esetre be lehetne látni egyenként az igazságtartalom meglétét, de ez a megoldás általában már nem kellően hatékony. Reprezentatív mintavételezéssel az elvi bizonyosság, hogy minden egyes esetre igaz legyen egy összefüggés, szintén nem kellően bizonyító erejű, bármit értsünk is reprezentatív mintavételezés alatt pl. egy végtelen lehetőségi térben (vajon a minta fele páros, a másik fele páratlan kellene, hogy legyen? De talán érdekes felvetés, miként is lehet vajon a prímszámok kapcsán reprezentatív mintát venni a végtelenből?). A bizonyítás tehát több mint a sejtés (vö. Collatz-sejtés bizonyítási kísérletei)… <http://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture>

Alakítsuk át, azaz bontsuk fel részlegesen, majd teljesen a zárójeles hatványkitevőket az n=k+1-re vonatkozó (előző) kifejezésben úgy, hogy abban az indukciós feltevés (melyet igaznak tételeztünk fel) megjelenjen:

 (részleges felbontás, ill. az indukciós feltevés megjelenítésének előkészítése)

 (teljes zárójel-felbontás)

Kiemeléssel hozzuk végleges formára kifejezést, vagyis ahol már megjelenik az indukciós feltevés:

Az állítás bizonyított: -nek – az indukciós feltevés értelmében – osztania kell a zárójeles kifejezést, így annak többszörösét (pl. a 25-szörösét) is. Mivel a kiemelés után éppen adódott kivonandóként, ezt is osztja. Az oszthatóság tulajdonságainak értelmében, ha osztja a két kifejezést (vagyis az indukciós feltevést magában foglaló kisebbítendőt és a kivonandót is), akkor osztja azok különbségét is, vagyis a feladatban megfogalmazott állítás igaz tetszőleges -re.

Laikus, avagy képletes nyelven: az indukciós feltevés kikényszerítése a komplex kifejezés többlépcsős átrendezése révén arra ad lehetőséget, hogy ezzel a taggal már külön ne kelljen foglalkozni. Vagyis az elemző elme teljes figyelmét a maradvány-részletre tudja fordítani. Így az indukciós feltevés és ennek visszanyerése egy boltív két pillérének tekinthető, melyeket statikailag a maradvány-részlet, mint zárókő stabilizál. A felületes szemlélő számára felvetődhet a kérdés, vajon miért merhetjük kijelenteni, hogy a pillérekre már igaz az oszthatóság? Nos azért, mert, ahogy feltevés tartalmazza is: a k-adik elemig minden egyes elem kipróbálásra került, s minden egyes próba helyesnek bizonyult.

## Kiegészítő értelmezések

A fentebb látható bizonyítás-típus (vagyis a teljes indukció) egy fajta univerzalizálási/kiterjesztési logika. A teljes indukció itt és most a pozitív egész számokra, ezek halmazára, más szavakkal a sorozat-jellegű problémákra vonatkozik. A számoknak (objektumoknak) csak egyetlen tulajdonsága (attribútuma) kerül kihasználásra: az, hogy ezek egymást követőek.

Kérdés: ilyen jellegű, de nem számokra vonatkozó problémák lehetnének-e pl. a populációkra/társadalmakra vonatkozó feltételezések? Például: ha egy-egy gomba/növény-egyed (objektum) adott paraméterekkel (attribútumokkal) rendelkezik (pl. alak, forma, méret, szín, illat, stb. = befolyásoló tényezők, avagy Xi) és ehető (következményváltozó, Y), akkor igaz-e, hogy minden ilyen tulajdonságokkal rendelkező egyed ehető?!

Vajon miért nem használja jelen esetben a biológia a teljes indukciót? Ilyen jellegű levezetéseket ugyanis nem igazán találunk a növényhatározókban és az ezeket megalapozó művekben. Válaszként felmerül, hogy noha a fenti biológiai probléma is diszkrét tulajdonságkombinációk következményeit írja le, de az egyes objektumok nem egy sorozat elemei, hanem „csak” egy halmazéi.

Amennyiben a számok egymásra épülésének analógiáját keressük, akkor felvetődik, hogy pl. egy idősor következő tagjának előrevetítése (pl. hány darab részvény fog fogyni holnap, ha az eddigi napokon adott mértékű fogyások voltak tapasztalhatók) talán már lehetne a teljes indukció hatáskörébe sorolt probléma? A válasz: sajnos nem! Ugyanis a valódi sorozatjelleg az időre és nem a részvényfogyásra vonatkozik. A fogyásadatok azonban egy másik sorozat elemeiként még értelmezhetők lehetnének. Ha ez így lenne és vélelmezhetően meglenne a sorozatképzés elve (képlete) olyan pontossággal, melynél már csak az a kérdés, mindenkor igaz lesz-e, akkor először is olyan matematikai világban mozognánk (vö. polinomok), melyeknek vagy rengeteg „rossz” tulajdonsága van, vagy olyan matematikai formalizmusokról lenne szó, melyeket még fel sem ismert a matematika, ill. nem kerültek idősorok értelmezése kapcsán még napirendre.

Az idősor-elemzést felfoghatjuk ugyanis egy olyan véletlenszám-generátornak, mely logikáját tetszőlegesen rövid/hosszú, de véges ismert szakasz alapján kellene megfejteni tudni. A véletlen azonban pl. attól véletlen, hogy a véges részletei alapján akár végtelen sok, az eddig ismert véges elemszámú „sorozatot” leírni képes „szabály” is feltárható, melyek zömmel eltérő folytatást valószínűsítenek. Így sem azt nem tudjuk, hogy bármelyik igaz-e, sem azt, hogy melyik az igaz, ha véletlenül a tényleges szabály a már felismert halmaz eleme lenne. Vagyis hiába léteznek tömegesen szabályok, melyek az eddigi lottó-húzások eredményeit egymásból képesek lennének levezetni, a következő heti húzások eltalálhatósága nem nőne ezáltal…

**Bizonyítás azonosságokkal**

bizonyítandó minden esetén, ahol az -edik Fibonacci-szám.
Megjegyzés: a Fibonacci-számok a matematikában az egyik legismertebb rekurzióval definiált sorozat tagjai. A sorozat képzési szabálya:

Az állítás ellenőrzése kis értékekre (vagyis kísérleti jelleggel, utánaszámolással):
-re:
-re:
Most tegyük fel, hogy az állítás -ig minden számra igaz. Bizonyítandó innen, hogy -re is igaz, ekkor bármely -re igaz.

Indukciós feltevés:
Az állítás -re:

Az oszthatóság tulajdonságai értelmében, ha mindkét összefüggés igaz, akkor osztja a két kifejezés különbségét is (erre még illik ráérezni a legalapvetőbb matematikai ismeretek alapján):

Ez utóbbi állítás általánosan is megfogalmazható:
elegendő ennek az összefüggésnek a bizonyítása (vagyis a bizonyítást nem csak ott és csak úgy lehet elvégezni, ahogy a bizonyítás kényszere felmerül, hanem minden olyan transzformáció megengedett, mely nem befolyásolja a bizonyítandó tételt, vagyis azonosság vélelmezhető a kiindulási és a transzformált állapotok között – ellenben a transzformációkról magukról valahol valakinek korábban már be kellett látnia, hogy az azonosság fennáll), ekkor – szintén az oszthatóság tulajdonságainak értelmében – a fenti -re megfogalmazott állítás is teljesül.

Nézzük most a Fibonacci-számokat:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 0 |  |
| 1 | 1 |  |
| 2 | 1 |  |
| 3 | 2 |  |
| 4 | 3 |  |
| 5 | 5 |  |
| 6 | 8 |  |
| 7 | 13 |  |
| 8 | 21 |  |
| 9 | 34 |  |
| 10 | 55 |  |

Megfogalmazható (vagyis ösztönös tapogatózás, a Konrad Lorenz-i ráérzés/intuíció alapján feltárható) a sejtés (Heuréka!), miszerint:

Bontsuk fel a Fibonacci-számokat a rekurziónak megfelelően:
, ahol F(i) = F(i-1)+F(i-2) a sorozatképzés szabályának értelmében[[1]](#footnote-1), ahol F(i-1) és F(i-2) az előző lépés szerint került kibontásra, ahol F(i-2) és F(i-4) kerül kibontásra, F(i-3) nem[[2]](#footnote-2) ahol a cél továbbra is a nem 3. és 6. index kiváltása, ahol immár nincs „zavaró” index, ahol a 3. index előfordulásainak száma 4, s a 6. indexek kioltáják egymástvagyis az állítás igaz. Ennek értelmében a fenti bizonyítandó állítás szintén igaz.

**Indirekt bizonyítás[[3]](#footnote-3)**

 irracionális szám,
bizonyítandó minden pozitív egész szám esetén.

Tegyük fel, hogy az állítás ellentettje igaz, vagyis racionális szám. Ha ebben a gondolatmenetben egyértelmű ellentmondásra jutunk, belátható hogy a kifejezés valójában irracionális.
Megjegyzés: racionális szám , ha felírható két (egymáshoz relatív prím) egész szám hányadosaként. Matematikai jelekkel: , ahol

Következzen tehát az indirekt feltevés:
A logaritmus definíciójának értelmében:
 ; ezután, mivel mindkét oldal pozitív, -adik hatványra emelhetünk:

Két szomszédos egész szám egymáshoz viszonyítva mindig relatív prím.
Bizonyítás: tegyük fel, hogy és . Ekkor, az oszthatóság tulajdonságai alapján , vagyis , ami azt jelenti, hogy .

A számelmélet alaptétele értelmében minden szám felbontható prímszámok szorzatára[[4]](#footnote-5), és a felbontás a tényezők sorrendjétől, illetve az előjelektől eltekintve egyértelmű (kanonikus alak)[[5]](#footnote-6). Mivel az egymást követő egész számok relatív prímek, kanonikus alakjukban nincs megegyező prímtényező[[6]](#footnote-7), így semmilyen hatványuk nem lehet egymással egyenlő[[7]](#footnote-8), vagyis az indirekt feltevés ellenmondásra vezet: a feladatban megadott kifejezés valóban irracionális.

**S Ön, Tisztelt Olvasó, milyen kommentárokkal látná el az alábbi példákat a fentiek szellemében?**

**Skatulya-elv**

Bizonyítsa be, hogy végtelen sok olyan -hatvány létezik, amelyek különbsége osztható -tel!

Definíció szerint két egész szám kongruens modulo (azaz számmal vett osztási maradékuk egyenlő), ha osztja a két szám különbségét. Legyen most .
A lehetséges osztási maradékok a -tel való osztásnál: , ez különböző maradékosztály.

A megadott állítás bizonyítható, ha sikerül megmutatni, hogy van ezen maradékosztály között létezik legalább egy, amelyben végtelen sok -hatvány található.

A skatulya-elv kimondja, hogy ha darab skatulyába -nél több darab elemet elhelyezve biztosan lesz legalább egy skatulya, amely legalább két elemet tartalmaz. A gondolatmenetet folytatva megfogalmazható egy második állítás is: véges sok skatulyába végtelen sok elemet elhelyezve biztosan lesz legalább egy skatulya, amelyben végtelen sok elem található.

Legyenek a skatulyák a maradékosztályok modulo , ezek száma, mint azt megállapítottuk, .
Legyenek a skatulyákban elhelyezendő elemek a -hatványok, amelyek száma nyilvánvalóan végtelen.

A skatulya-elv értelmében innen látható, hogy a végtelen sok szám elhelyezésekor legalább egy maradékosztályban végtelen sok elem található majd, ezek különbsége pedig mindig osztható -tel.

**Skatulya-elv II.**

Egy -as sakktáblán bábut helyeztünk el. Mutassa meg, hogy a táblának minden esetben van olyan, három kis négyzetből álló (a kis négyzetek közös oldallal kapcsolódnak egymáshoz) összefüggő, L-alakú része, amely nem tartalmaz egyetlen bábut sem.

A mellékelt ábrán egy lehetséges elrendezés látható, ahol a piros pontok jelölik a bábukat, a feladatban keresett szabad terület pedig sárga színnel van kiemelve.

Érdemes észrevenni, hogy a sakktábla mezőjére darab, azaz a felénél pont egyetlen darabbal kevesebb bábu került fel.

A skatulya-elv éppen az ehhez hasonló helyzetekről fogalmaz meg állítást, ahol egy tulajdonság elemig azonos marad, azonban elemnél megváltozik.
(Látható, hogy ha bábut helyeznénk el, és az utolsót pont az utolsó világos mezőre tennénk, már nem teljesülne az állítás.)

A bizonyítás kulcsát tehát érdemes a skatulya-elvben keresni!

Osszuk fel képzeletben a sakktáblát -es kis négyzetekre, ezekből pont darab található a táblán. Amennyiben pedig egy ilyen négyzetben , esetleg darab bábu található, a kis négyzet még biztosan tartalmazza a keresett szabad területet. Abban az esetben azonban, ha minden kis négyzetbe jut két bábu, már lehetséges olyan elrendezés, ahol a táblán sehol sem jelenik meg a keresett terület.

Legyenek tehát a skatulyák a fent definiált -es kis négyzetek ( darab), az elhelyezendő elemek pedig a bábuk ( darab). A skatulya-elv értelmében ha , akkor nem létezik olyan elrendezés, ahol minden kis négyzetre kettő darab bábu kerül, így biztosan megtalálható lesz a sakktáblán a keresett szabad terület.

**Bizonyítási feladat a geometriában**

Legyen egy tetszőleges pozitív valós szám. Bizonyítandó, hogy a sík minden pontját kékre, pirosra vagy zöldre színezve lesz két azonos színű pont, amelyek távolsága éppen .

Mivel a sík minden pontját színezzük, a három szín valóban nem elég. Csupán z ábrán szürkével jelölt (szabályos háromszögekből felépülő) rács pontjait ki lehet színezni három színnel anélkül, hogy a szomszédos pontok azonos színűek lennének.

A rács egy alapegysége, egy trapéz van feltüntetve az ábrán, ebben a trapézban a két azonos színű pont (sárgával jelölve) távolságra van egymástól.

A lila nyíl mentén -kal elforgatva a fenti trapézt, a két távoli piros pont távolsága éppen lesz, és az elforgatott trapéz színezési szisztémája is megegyezik az eredetivel, tehát az elforgatott pont színe nem különbözhet az eredetitől.

*Megjegyzés:*
az elforgatás pontos szöge kiszámítható, ugyanis a három azonos színű pont által meghatározott háromszög oldalai rendre hosszúságúak, tehát a háromszög egyenlőszárú. A szárak közötti szögfelező éppen merőleges az alapra, melynek behúzásával két (szimmetrikus) derékszögű háromszöget kapunk, amelyekben a forgásszög felének szinusza könnyedén számítható:
Innen a forgásszög:

1. Oktatásdidaktikai szempontból érdekes adat-vizualizációs kihívást jelentene, ha egy fajta családfaként színekkel és/vagy egyéb szimbólumokkal érzékeltetésre kerülne, vajon melyik F(i-3) és F(i-6) melyik „őstől” származik? [↑](#footnote-ref-1)
2. Az F(i-3) ki nem bontásának indoka nem más, mint az, hogy az alapképletben = F(i)-F(i-6) = 4 \* F(i-3), 3. és 6. tagok szerepelnek. Tehát minden más index eltüntetésére kell törekedni annak érdekében az egyenlet bal oldalán, hogy a jobboldali kifejezéshez azonosság szintjén eljuthassunk…

[Az ilyen jellegű tételes és részletes magyarázatok leírása nélkül az átlag halandó nem feltétlenül képes magától értetődően reprodukálni még akkor sem egy ilyen levezetés mögötti gondolatiságot, ha egyébként szóban az óra keretében már egyszer-többször hallhatta. A matematika felelőssége, hogy a „nyelvhasználat” szintjére is át tudja vinni a matematikai jelekkel leírható logikákat hiánytalanul, félreérthetetlenül, azaz kölcsönös egyértelműség mellett. Amennyiben ez nem lehetséges, az kizárja, hogy a matematikai nyelvezet az emberiség univerzális nyelvévé váljon. A matematikai jelrendszer csak a köznyelvi kifejezéseknél tömörebb, bizonyos értelemben kevesebb értelmezési/hermeneutikai kockázatot rejtő formája lehet, de nem adhat többet/mást. A szó, a gondolatteremtő erő, s úgy tűnik jelenleg, hogy az emberi szóteremtő képesség, az absztrakció, minden kockázatával együtt egy jelenleg matematikai értelemben még ki nem váltható erőtér, eszköz a világ megértésének útján…] [↑](#footnote-ref-2)
3. A tagadás tagadásának igazságtartalmára épül pl. a hasonlóságelemzések kapcsán a többrétegű modellezés önellenőrző képessége is… [↑](#footnote-ref-3)
4. hiszen = ??? 🡨 a mások által korábban bizonyított tételek kapcsán legalább példaértékűen érdemes ezeket bemutatni… [↑](#footnote-ref-5)
5. vagyis = ??? 🡨kifejtendő miért van erre a gondolatrészre szükség itt és most? [↑](#footnote-ref-6)
6. ill. az 1 nem számít? 🡨 vagyis meg kell kísérelni a félreérthetőségeket is feltárni… (pl. minden szám felbontható prímszámok szorzatára, vagyis 2 = 1\*2, de az 1 így mindenhol jelen lesz?!, ami zavaró tényező a fenti okfejtésben?!) [↑](#footnote-ref-7)
7. mert a hatványozás egy olyan művelet, mely = ??? 🡨ismét fontos más szavakkal is kifejteni az alapvető ismeretet [↑](#footnote-ref-8)