Végtelen történet

*Híres paradoxonok és feloldásaik*

A végtelen fogalma messze nem tartozik a legegyszerűbb matematikai jelenségek közé, ennek megfelelően a történelemben befutott hosszú pályáját is számos – híressé vált – paradoxon, tévedés szegélyezi. Azt, hogy a végtelen nem szám, hanem valamiféle „jelölés”, középiskolában szokás említeni, s hogy ennek a matematikailag mégoly esetlenül megfogalmazott állításnak mekkora szerepe van, azt először az ókori görög gondolkodók munkáiban érhetjük tetten.

Az eleai Zénón életéről rendkívül kevés adat maradt az utókorra, nevét őrzi azonban néhány híres paradoxon, melyekkel a példák kiötlője (ő vagy más) a mozgás illuzórikus voltát kívánták szemléltetni. Az első – talán a leghíresebb – paradoxon a gyorslábú Akhilleusz és a lassú teknősbéka futóversenyéről emlékezik meg. A történet szerint híres harcos a verseny előtt nagyvonalúan 100 láb előnyt biztosít a teknősbékának, azonban az érvelés szerint ezek után nemhogy megelőzni, valójában többé utolérni sem fogja lomha versenytársát.

S hogy miért? Hogyan maradhat alul hős egy teknőssel vívott küzdelemben? Mi sem egyszerűbb!

Fontoljuk meg a következőket: ugye magától értetődő, hogy bizony még a sebes Akhilleusznak is idejébe telik behoznia a nagyvonalúan biztosított 100 lábnyi előnyt, amit a teknős kapott? Igen? Rendben. Nos, ezen idő alatt ugye a teknős ismét valamicskét, mondjuk 1 lábnyit előrébb haladt, talán ezt sem vitatná senki sem. Csakhogy a híres harcos lényegében itt vesztette el a versenyt, mert ezt az egy lábnyi utat megint idejébe telik megtenni, azalatt a teknős ismét előnyre tesz szert, amit Akhilleusznak ismét be kell hoznia, és ez bizony így megy egészen a végtelenségig…! A gyorslábú Akhilleusz, mielőtt megelőzhetné a teknőst, előbb utol kell, hogy érje, de a teknős mindenkori utolsó helyzetének eléréséhez szükséges idő alatt versenytársa mindig eltávolodik tőle, így a végtelenségig versengve sem tudná legyőzni a lomha állatot.

Meg kell vallani, a megállapítás nem valami hízelgő, egyenesen kellemetlen a hatalmas hősre nézve, mivel vigasztalódjon hát egy nálánál is szerényebb képességekkel bíró átlagember? Nos, jobb híján azzal, hogy nem csak Akhilleusz lassult le váratlanul a teknős mögött, de valójában a világon nem is képes semmi mozogni…

Zénón második paradoxonja ugyanis egy, az előzőnél is nyilvánvalóbb helyzetet tár az olvasó elé: képzeljük el magát Zénónt, amint kezében egy kővel egy fa mellett mereng a mozgás látszólagosságának vagy éppen valóságának kérdésén! Gondoljuk el, hogy a kérdés nem éppen könnyű, éppen az előbb emésztettük csak meg a logikai következtetéseink szerint nyilvánvalónak látszó, mégis éppoly zavarba ejtő versenyfutás tanulságait. Ne csodálkozzunk hát azon sem, hogy Zénón is – némileg felpaprikázva, hogy a kérdésre a végső válasz nem fedi fel magát előtte – a kezében tartott követ hirtelen felindulással a közelben (mintegy 8 láb távolságra) álló fához vágja.

Ugye szinte látjuk magunk előtt, halljuk is a tompa koppanását, ahogy az öreg tölgy törzséről lepattanva a csalitosban eltűnik. Na, de hogyan is jutott el a filozófus kezéből a fáig? Hiszen mielőtt a fát elérte volna, el kellett jutnia az út felére, ez ismét kétségtelenül időbe tellett; majd a hátralévő fél út felét is meg kellett tennie, az előzőnél nyilván rövidebb, de mégis csak némi idő alatt. S bár ekkor már az út háromnegyedénél jár, a fáig még további 1/8, 1/16 részét mindig meg kell tennie a teljes szakasznak, hiszen a mindenkor hátralévő útnak ezek éppen a felét teszik ki, s amíg itt el nem haladt, a fát természetszerűleg el nem érhette. Tehát egymást követően sok kis időegységig tart a kő repülése, a fát pedig a végtelenségig el nem éri – meglepő, ugye? Akkor már csak azt kell észrevennünk, hogy valójában el sem indult az a kő Zénón kezéből! Hiszen félútig is át kell haladnia annak a felén, vagyis az út egynegyedén, előtte annak a felé, és annak a felén… és így tovább. Ismét csak a végtelenségig, tehát miközben mi elmélkedünk, érzékeink megcsalni látszanak minket.

A helyzet jelen állapotában válságos, egyenesen tarthatatlan, hiszen – hacsak nem a traffipaxos rendőrt kívánja valaki meggyőzni, hogy amit ő gyorshajtásnak vél, az csupán illúziója a mozgásnak – rendre szükségünk volna arra, hogy egyik helyről, lehetőleg az életünk számára szabott véges idő alatt, eljussunk valamely másikba.

Ahol tehát önmagában az okoskodás, vagy épp a szavak cserbenhagynak, támaszkodjunk a matematikára! Mind Akhilleusz, mind a kő esetében az első legyen az, hogy legalább végtelennek tetsző útjukat emberileg felérhető hosszúságúra rövidítjük. Szükségünk volna tehát a következő – továbbra is végtelen sok elemből álló – összegre:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+…=T$$

Ez ugyanis a kiindulási ponttól a célig megtenni szándékozott egységnyi út bejárásához szükséges időket tartalmazza a korábban már alaposan körbejárt bontásban. Az egyetlen probléma csupán az, hogy az összegről egyelőre nem bírunk tudomással – vegyük tehát az előbbi kétszeresét, s lássuk, hogyan segíthet ez közelebb a kérdés megválaszolásához:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+…=2T$$

Ha most a második sorból az elsőt kivonjuk, azonnal eredményre is jutunk, történetesen:

$$1=T$$

Mely a Zénón-féle paradoxonokkal való találkozásunk előtt talán természetesnek tűnhetett: egységnyi hosszúságú út megtételéhez – egyenletes sebesség mellett – nyilvánvalóan véges, éppen egységnyi idő szükségeltetik. Zénón gondolatmenetét tehát ott szükséges kritikával illetni, hogy végtelenül sok pozitív szám összege is lehet véges szám, s a jelek szerint ezzel még számolni, műveleteket végezni is képesek vagyunk.

Lazításképpen:
*Végtelen sok matematikus bemegy a kocsmába.
Azt mondja a csaposnak az első: „Kérek egy sört!”
Majd a második: „Kérek egy fél sört!”
Folytatódik a sor, jön a harmadik: „Egy negyed sört kérek!”
A kocsmáros ezt hallva ingerülten közbevág:
Na, tudjátok, kivel szórakozzatok!* ***Itt van két sör****, aztán tűnés!*

A feltöltődésre talán szükség is van, mert a folytatás sem fukarkodik meglepő eredményekben. Az előbbi módszer olyan szépen bevált, hogy az embernek kedve támadhat más végtelen összegeket[[1]](#footnote-1) is kiszámítani annak segítségével:

$$1+2+4+8+16+…=S$$

Az összeget ismét nem ismerjük, így ismét használjuk a bevált eljárást, szorozzunk kettővel:

$$2+4+8+16+32+…=2S$$

$$-1=S$$

A kivonás után a fenti eredmény adódik. A kettő hatványainak összege tehát nemcsak véges, de egyenesen negatív szám! Nem mondom, ilyen körülmények között a végén még megérné eladósodni… ugyanis a negatív adósság valami olyasmit jelentene, hogy végül még a bank fizet a hitelt felvevőnek.

Ezek a végtelen összegek, úgy tűnik, továbbra is meglehetősen kiszámíthatatlanul viselkednek, s legalábbis gyanítható, hogy akárcsak Zénón esetében, az utóbbi összegszámító sablonnál is további pontosításokat szükséges tennünk. Mára a helyzet igen szerencsés, ugyanis a XIX. századra egy Weierstrass nevű matematikus munkájának is nagyban köszönhetően alaposan sikerült kiismerni a végtelen sorok tulajdonságait, s bebizonyították, hogy azok háromféleképpen viselkedhetnek: vagy véges az összegük; vagy minden határon túl nőnek (mint a kettő hatványai), esetleg csökkennek; végezetül pedig előfordulhat, hogy ugrálnak több érték között, s összegük nem tart semmilyen meghatározható irányba.

A Zénón által említett esetek a véges összegű sorokra adtak példát, esetükben szépen alkalmazhatóak voltak a véges számok esetén megszokott műveletek (még a kivonás is) a végtelen összeg meghatározásánál is. Hasonló lépések a végtelen összegekkel már hazardírozásnak számítanak, ugyanis a végtelen mennyiségek esetében igen meglepő szabályok szerint képes viselkedni a legegyszerűbb művelet is… álljon itt egy utolsó példa.

A huszadik század elejéről származnak a következő kérdések, felvetésük pedig annak a David Hilbertnek a nevéhez fűződik, aki a század 23 legjelentősebbnek tartott megoldatlan problémáját is a matematikustársadalom elé tárta. Abból a híres 23 problémából néhány a mai napig megoldásra vár, a „Grand Hotel” esete azonban kellemes tornát jelenthet az agytekervényeknek bárki számára.

Képzeljünk el egy hotelt, benne végtelen szobával. Nem mindennapi létesítmény, ahogyan az a teljesítmény is figyelemre méltó, hogy egy napon így is sikerült minden szobájukat kiadniuk, s a recepciós már készült kihelyezni a bejártba a „Megtelt” feliratú táblát, amikor is a késő esti órán egy újabb vendég érkezett, és szobát szeretett volna kivenni. A recepciós – empatikus és elszánt ember lévén – elhatározta, hogy márpedig nem küldi el a vendéget, hanem mindenképpen talál számára szabad szobát valahogyan. Eszébe jutott a szálloda hangosbemondó rendszere, melyet előrelátó módon a végtelen létesítmény minden szobájában felszereltek, s ezen a rendszeren keresztül a recepciósnak lehetősége volt egy időben a hotel minden vendégéhez üzenetet eljuttatni. A jelen késői órán a recepciós, természetesen a zavarásért udvariasan elnézést kérve, arra utasította a már beköltözött szállóvendégeket, hogy szíveskedjenek szobájukat elhagyni, és átköltözni mindannyian az eggyel mellettük található (eggyel nagyobb sorszámú) szobába. Ezzel az 1. szobát az új vendég számára éppen felszabadította, s – természetesen a megfelelő last minute-felárral számolt díj megfizetése ellenében – azt a vendég azonnal birtokba is vehette.

A szálloda híre, ahol mindig teltház van, de nincs, akit ne tudnának elszállásolni, gyorsan terjedt, s a recepciós karrierje is a szálloda bevételeivel együtt ívelt felfelé. Már a hotel menedzsereként, akkor izzadt csak meg legközelebb, amikor először érkezett egyszerre egy végtelen busz, tele vendégekkel, s kellett számukra a teltház ellenére szobát biztosítani. De megoldotta[[2]](#footnote-2), akárcsak azt követően végtelen sok végtelen busz vendégeinek elszállásolását!

Ebben persze segítségére volt a megszámlálhatóan végtelen halmazok ismerete, s bár Georg Cantor munkásságának nagy tisztelője volt, azért rendkívül hálás volt a sorsnak, hogy nem egy kontinuum-számosságú szobával rendelkező létesítményt kell elvezetnie! ☺

1. Megmutatható például, hogy ha egy szabályos háromszöget az oldalaival párhuzamos szakaszokkal (középvonalaival) négy egyenlő részre vágunk, ezek közül az egyik szélsőt kiszínezzük, majd az eljárást a mindenkori középső háromszögön ismételjük, akkor végül (végtelen sok, egyenként egyre kisebb háromszögek formájában) éppen a teljes eredeti háromszög egyharmadát színeztük ki. [↑](#footnote-ref-1)
2. Belátható, hogy ez valóban lehetséges, ld. <https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo>
vagyis a „Grand Hotel” példája szerint nem csak $\infty +1=\infty $,
de a némileg meglepőbb $\infty +\infty =\infty $, illetve a $\infty ⋅\infty =\infty $ állítások is igazak! [↑](#footnote-ref-2)